

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS.** Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y celulares.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración = 60 minutos

1) [20 pts]

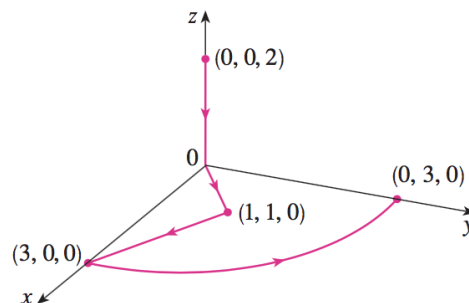
Sea

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y, x^3z - 3x, x^3y - 2z)$$

Calcular

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde C es la curva cuyo punto inicial es $A = (0, 0, 2)$ y el punto final $B = (0, 3, 0)$ como se ilustran en la figura.



2) [20 pts] Sean

- C la curva que corresponde a la frontera de la intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 = x$ y $x^2 + y^2 = y$.
- $\vec{F}(x, y) = (0, x)$ un campo vectorial tal que $\vec{F} \in C^1$.

Calcular

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

a) Directamente. Ayuda : $\int \cos(t) dt = \sin(t) + C$ y $\int \cos^2(t) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + C$

b) Usando el Teorema de Green.

3) [20 pts] Sean

- la superficie $\mathcal{S}$ delimitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $x + z = 2$ y $z = 0$.
- E el sólido acotado por la superficie $\mathcal{S}$.
- el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + \sin(yz), y - xe^{-z}, z^2)$

Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, usando el Teorema de la Divergencia.

Pauta :

$$1) \vec{F} \text{ es conservativo , pues } \operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2yz - 3y & x^3z - 3x & x^3y - 2z \end{vmatrix} = (0, 0, 0) \quad \mathbf{5 \text{ pts}}$$

Busquemos la función potencial f tal que $\vec{F} = \nabla f$, es decir

$$\begin{cases} f_x = 3x^2yz - 3y \implies f(x, y, z) = x^3yz - 3xy + g(y, z) + C_1 \\ f_y = x^3z - 3x \implies f(x, y, z) = x^3yz - 3xy + h(x, z) + C_2 \\ f_z = x^3y - 2z \implies f(x, y, z) = x^3yz - z^2 + p(x, y) + C_3 \end{cases}$$

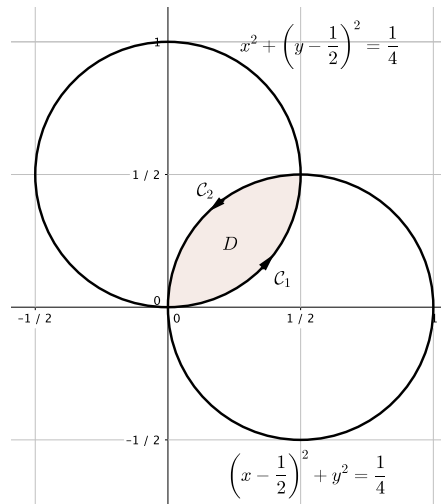
Luego $f(x, y, z) = x^3yz - 3xy - z^2$ **10 pts**

Finalmente, por el teorema fundamental, obtenemos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) = f(0, 3, 0) - f(0, 0, 2) = 0 - (-4) = 4$$

5 pts

2) Previamente note que la gráfica está dada por



4 pts

a) **Por Green:** Sea $\vec{F} = (P, Q) \Rightarrow Q_x - P_y = 1 - 0 = 1$. Luego

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D dA = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sin(\theta)} r \, dr d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} r \, dr d\theta = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

2 + 2 + 2 pts

b) **Directamente:** Las parametrizaciones son:

$$\begin{aligned} C_1 : \alpha_1(t) &= \left(\frac{1}{2} \cos(t), \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin(t) \right) \implies \alpha'_1(t) = \left(-\frac{1}{2} \sin(t), \frac{1}{2} \cos(t) \right), & \frac{3}{2}\pi \leq t \leq 2\pi \\ C_2 : \alpha_1(t) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(t), \frac{1}{2} \sin(t) \right) \implies \alpha'_2(t) = \left(-\frac{1}{2} \sin(t), \frac{1}{2} \cos(t) \right), & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{aligned}$$

2 + 2 pts

Luego

$$\begin{aligned} \oint_C 0 \, dx + x \, dy &= \int_{3\pi/2}^{2\pi} \left(0, \frac{1}{2} \cos(t) \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin(t), \frac{1}{2} \cos(t) \right) dt \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(t) \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin(t), \frac{1}{2} \cos(t) \right) dt \\ &= \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{4} \cos^2(t) \, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1}{4} \cos(t) + \frac{1}{4} \cos^2(t) \right) dt \\ &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16} \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2+2+2 pts

- 3) ■ $\operatorname{div}(\vec{F}) = 2x + 1 + 2z$ **2 pts**
 ■ Sea $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - x \quad y \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$ **2 pts**
 ■ Por el teorema de la divergencia

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_E \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV$$

expresando E en coordenadas cilíndricas, obtenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_E 2x + 1 + 2z \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{2-r\cos(\theta)} (2r\cos(\theta) + 1 + 2z) \cdot r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-r^2 \cos^2(\theta) - r \cos(\theta) + 6) \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-4 \cos^2(\theta) - \frac{8}{3} \cos(\theta) + 12 \right) d\theta \\ &= 20\pi \end{aligned}$$

10 + 2 + 2 + 2 pts